

बी.एस.सी. - तृतीय वर्ष

आंतरिक मूल्यांकन परीक्षा 2021-22 (ऑनलाइन)

विषय - गणित

प्रश्नपत्र - प्रथम (विश्लेषण) [Analysis]

पूर्णांक - 50

नोट - प्रत्येक इकाई से कोई दो प्रश्न हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई - 1

प्रश्न (1) (अ) श्रेणी $1 - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.5^2} - \frac{1}{7.5^3} + \dots$,

की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

(ब) मान लो,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$

(स) फलन $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

इकाई - 2

प्रश्न (2) (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सतत फलन रीमान समाकलनीय होगा है।

(ब) 'समाकलन गणित के मूलभूत प्रमेय' को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(स) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ का अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए।

इकाई-3

प्रश्न (3)(अ) दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक सदैव उनके मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

(ब) लांबिक निकाय (Orthogonal System) को समझाइये।

(स) सिद्ध कीजिये कि फलन $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और संगत विश्लेषिक फलन $u + iv$ को ज्ञात कीजिये।

इकाई-4

प्रश्न (4)(अ) मानलो d एक अरिक्त समुच्चय X पर एक दूरीक है दर्शाइये कि अग्र रूप से परिभाषित फलन:-

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

जहाँ $x, y \in X$, भी X पर एक दूरीक है।

(ब) "किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत गोल्क एक विवृत समुच्चय होता है" सिद्ध कीजिये।

(स) संकुचन प्रतिचित्रण को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

इकाई-5

प्रश्न (5)(अ) दर्शाइये कि समष्टि S गणनीय सघन (Separable) है

(ब) मानलो $X = (0, 1)$ तथा d, X पर निरपेक्ष मान दूरीक है और मानलो $f: X \rightarrow X$

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in X \text{ से परिभाषित है।}$$

दर्शाइये कि $f, (0, 1)$ पर एकसमान संतत है।

(स) सिद्ध कीजिये कि किसी दूरीक समष्टि में दो संतत उप-समुच्चय का संघ संतत (compact) होता है।

बी.एस.सी. - तृतीय वर्ष

आंतरिक मूल्यांकन परीक्षा 2021-22 (ऑनलाईन)

विषय - गणित

प्रश्नपत्र - द्वितीय (अमूर्त बीजगणित)

[Abstract Algebra]

पूर्णांक - 5

नोट - प्रत्येक इकाई से कोई दो प्रश्न हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई - 1

प्रश्न(1)(अ) मान लो \mathbb{R}^+ सभी धन वास्तविक संख्याओं का गुणात्मक समूह है। $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ को $f(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{R}^+$

से परिभाषित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि f एक स्वाकारिता है।

(ब) द्वितीय सिद्ध प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

(स) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र $Z(G)$ सदैव G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

इकाई - 2

प्रश्न(2)(अ) यदि, f , वलय $(R, +, \cdot)$ से $(R', +, \cdot)$ एक समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि $(\text{Ker } f, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$ की एक गुणजावली होता है।

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक वलय का प्रत्येक विभाग वलय, वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

(स) यदि $f(x)$ और $g(x)$, $R[x]$ के दो शून्येतर बहुपद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{घात } [f(x) \cdot g(x)] \leq \text{घात } f(x) + \text{घात } g(x).$$

इकाई - 3

प्रश्न(3)(अ) मानलो $V(F)$ एक सदिश समष्टि है, $0, V$ का शून्य सदिश है, और $0, F$ का शून्य अदिश है, तब सिद्ध कीजिए -

(i) $a0 = 0, \forall a \in F$

(ii) $a\alpha = 0 \Rightarrow a = 0$ या $\alpha = 0$

(ब) यदि S तथा T किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के कोई दो उपसमुच्चय हों, तो सिद्ध कीजिए कि
 $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

(स) जाँच कीजिए कि सदिशों $(2, 3, -1), (-1, 4, -2)$ एवं $(1, 18)$ का समुच्चय सदिश समष्टि $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्र है या परतंत्र।

इकाई - 4

प्रश्न(4)(अ) $T: V_3 \rightarrow V_1$ नियम

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि यह एक रैखिक रूपान्तरण नहीं है।

(ब) यदि $f: V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है:

$$f(x, y, z) = (y, z)$$

तो दिखाइये कि f एक रैखिक रूपान्तरण है।

(स) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ विकर्णीय है।}$$

इकाई - 5

प्रश्न (5) (अ) एक समिश्र आन्तर गुणन समष्टि में दो सदिश α और β लाम्बिक होंगे यदि और केवल यदि

$$\|a\alpha + b\beta\|^2 = \|a\alpha\|^2 + \|b\beta\|^2,$$

a, b के सभी अदिश मानों के लिए ।

(ब) यदि α और β दो लाम्बिक इकाई सदिश हों, अर्थात् $\{\alpha, \beta\}$ एक प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय हों, तो सदिश α और β के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये ।

(स) एक आन्तर गुणन समष्टि में सदिशों का प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र (L.I.) होता है ।

बी.एस.सी. - तृतीय वर्ष

आंतरिक मूल्यांकन परीक्षा 2021-22 (ऑनलाईन)

विषय - गणित

प्रश्नपत्र - तृतीय (विविक्त गणित)

पूर्णांक 50

[Discrete Mathematics]

नोट - प्रत्येक इकाई से कोई दो प्रश्न हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई - 1

प्रश्न (1) (अ) गणितीय आगमन से दिखाइए कि

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 1$$

(ब) भाषा $L = \{ a^i b^{2i} : i \geq 1 \}$ के लिए व्याकरण की संरचना कीजिए।

(स) यदि 4 अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 अंको के समूह से निकाले जाते हैं तो चारों निकाले गये अंकों का योग 12 से कम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

इकाई - 2

प्रश्न (2) (अ) यदि I पूर्णांको का समुच्चय है तो तथा संबंध

$xRy \Rightarrow x-y$ एक सम पूर्णांक हो, तो सिद्ध कीजिए

कि R एक तुल्यता संबंध निरूपित करता है, जहाँ $x, y \in I$

(ब) यदि (L, \leq) एक जालक है तथा $a, b, c \in L$ तो सिद्ध

कीजिए कि $a \leq c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

(स) सिद्ध कीजिए कि किसी ग्राफ में विषम घात वाले शीर्ष सर्वत्र सम होते हैं।

इकाई-3

प्रश्न(3)(अ) निम्नलिखित की परिभाषा लिखिए -

(i) परिमित अवस्था यंत्र (Finite State Machine)

(ii) तुल्य यंत्र (Equivalent Machine)

(ब) एक परिमित अवस्था मशीन का निर्माण कीजिये जिसका एक निर्गम ठीक 1 हो जब निवेश-अनुक्रम अंक 101 के साथ समाप्त हो।

(स) निम्न जनक फलन के लिए संख्यात्मक फलन ज्ञात कीजिए -

$$A(z) = \frac{1}{5 - 6z + z^2}$$

इकाई-4

प्रश्न(4)(अ) पुनरावृत्ति संबंध (Recurrence Relations) को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

(ब) जनक फलन विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित अंतर समीकरण हल कीजिये :

$$a_r = 3a_{r-1}, \quad r \geq 1$$

दिया गया है : $a_0 = 2$.

(स) यदि वलय R में $a^2 = a$, $\forall a \in R$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $a + a = 0$, $\forall a \in R$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

इकाई 5

प्रश्न (5)(अ) किसी बंटनीय जालक (L, \leq) में यदि एक अवयव पूरक रखता है तो यह पूरक आद्वितीय होता है।

(ब) सिद्ध कीजिए कि बूलीय बीजगणित $(B, +, \cdot)$ में यदि $a+x = b+x$ और $a+x' = b+x'$ हो, तो $a=b$.

(स) पुनरुक्ति (Tautology) को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि कथन $(P \wedge \neg P) \Rightarrow P$ एक पुनरुक्ति है।