

बी.रुस.सी.- द्वितीय वर्ष

आंतरिक मूल्यांकन परीक्षा 2021-22 (ऑनलाइन)

विषय - गणित

प्रश्नपत्र - प्रथम (उच्च कलन)

पूर्णांक-5

नोट - प्रत्येक इकाई से कोई दो प्रश्न हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई - 1

प्रश्न(1)(अ) प्रत्येक अस्थिरी अनुक्रम परिवह्न होता है, तथापि इसका विलोभ सदैव सत्य नहीं है।

$$(ब) \text{ सिद्ध कीजिए : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^{1/n} = e.$$

(स) निम्नलिखित के उदाहरण सहित परिभासित कीजिए —

- (i) निवेश्वर अभिसरण (Absolute Convergence)
- (ii) प्रतिबंधी अभिसरी (Conditional Convergence)

इकाई - 2

प्रश्न(2)(अ) दर्शाइये कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x=0$ पर संतत व अवकलनीय है।

(ब) फलन $f(x) = x^2 - 6x + 8$ के लिये अन्तराल $[2, 4]$ में रोले प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

(स) लाग्रांज का मध्यमान प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

प्रश्न(3) (अ) $f(x, y)$ की सांतत्यता का परीक्षण मूल बिन्दु $(0, 0)$ पर कीजिए —

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ब) यदि $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ तो $f_x(1, 2)$ और $f_y(1, 2)$ ज्ञात कीजिए।

(स) यदि $u = e^{xyz}$, तो दर्शाइये कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2) e^{xyz}.$$

प्रश्न(4) (अ) सरल रेखाओं के कुल $y = mx + \frac{a}{m}$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

(ब) परवलय $y^2 = 4ax$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

(स) फलन $u = x^3 + y^3 - 3axy$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के विवेचना कीजिए।

प्रश्न(5) (अ) निम्नलिखित को परिभ्राष्ट कीजिए —

- (i) बीटा फलन (Beta Function)
- (ii) गामा फलन (Gamma Function)

(ब) मूल्यांकन कीजिये :

$$\int_0^1 \int_0^{2x} (x^2 + y^2) dx dy$$

(स) $\iint_R xy dx dy$ का मान निकालिये, जहाँ समाकलन क्षेत्र R,
वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का धन चतुर्थांश है।

—X—X—X—

बी.एस.सी. - द्वितीय वर्ष

आंतरिक मूल्यांकन परीक्षा 2021-22 (ऑनलाईन)

विषय - गणित

प्रश्नपत्र - द्वितीय (अवकल समीकरण)

पूर्णांक

नोट - प्रत्येक इकाई से कोई दो प्रश्न हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई - 1

प्रश्न (1) (अ) धार श्रेणी विधि से हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} - y = 0$

(ब) निम्नलिखित की परिभाषा लिखिए -

(i) व्हेसल अवकल समीकरण

(ii) लेजान्ड्रे अवकल समीकरण

(स) $f(x) = 5x^3 + x$ को लेजान्ड्रे बहुपदों के पदों में व्यक्त कीजिए।

इकाई - 2

प्रश्न (2)

(अ) लाप्लास रूपान्तर को परिभ्रषित कीजिए तथा फलन $F(t) = e^{at}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए।

(ब) $L\{t^3 \cos t\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(स) हल कीजिए : $(D^2 - 2D + 2)y = 0$, $y = D_y = 1$

जब $t = 0$, $D \equiv \frac{d}{dt}$

इकाई - 3

प्रश्न(3) (अ) सम्बन्ध $z = f(x+iy) + F(x-iy)$

से एक आंशिक अवकल समीकरण की रचना कीजिए, जहाँ f तथा F स्वेच्छ फलन हैं।

(ब) पूर्ण, विचित्र रूप व्यापक हल ज्ञात कीजिये :

$$q - p + x - y = 0$$

(स) चारपिट विधि से व्यापक हल ज्ञात कीजिये : $z = pq$.

इकाई - 4

प्रश्न(4) (अ) द्वितीय कोटि के आंशिक अवकल समीकरण को उदाहरण सहित परिभ्राषित कीजिए।

(ब) हल कीजिए : $t - xq = x^2$.

(स) हल कीजिए : $(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy$.

इकाई - 5

प्रश्न(5) (अ) मदि वर्ग $C[0, 1]$ पर एक फलनक $I[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx$

परिभ्राषित है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I[1] = 1 \quad \text{तथा} \quad I[\sin \pi x] = \frac{2}{\pi}.$$

(ब) निम्नलिखित बक्र की निकटता (Closeness) का अन्वेषण कीजिए

$$y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}, \quad y_1(x) \equiv 0 \quad [0, \pi] \text{ पर।}$$

(स) फलनक $I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

का चरममान (उचित) परीक्षण कीजिए।

वी.एस.सी. - द्वितीय वर्ष

आंतरिक मूलभांकन परीक्षा 2021-22 (ऑनलाईन)

विषय - गणित

प्रश्नपत्र - तृतीय (यांत्रिकी) [Mechanics]

पूर्णांक - 5

नोट - प्रत्येक इकाई से कोई रुक्त प्रश्न हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

इकाई - 1

प्रश्न (1) (अ) दो बराबर और भार P , दो ऊरियों ACP और BCP से बंधे हुए हैं जो एक चिकनी खड़ी C के ऊपर होकर जाती हैं। AB एक भारी दण्ड है जिसका भार W है और जिसका गुरुत्व केन्द्र A से a कीट और B से b कीट है। दर्शाइये कि AB शैतिज से कोण

$$\tan^{-1} \left[\frac{a-b}{a+b} \tan \left(\sin^{-1} \frac{W}{2P} \right) \right] \text{ बनाती है।}$$

अधिकारी

(ब) लम्बाई l के एक समांग चैन को समान शैतिज रेखा में दो विन्दुओं A तथा B से इस प्रकार लटकाया गया है कि प्रत्येक अन्तस्थ तनाव निम्नतम विन्दु के तनाव का n गुणा है। दर्शाइये कि विस्तृति AB अवश्य ही

$$\frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \log \left[n + \sqrt{n^2-1} \right] \text{ होनी चाहिए।}$$

इकाई - 2

प्रश्न (2) (अ) निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए -

- (i) शून्य रेखाएँ (Null Lines)
- (ii) शून्य आधूर्ण समतल (Null plane)
- (iii) शून्य विक्षेप स्थिति (Null point)
- (iv) संयुग्मी रेखाएँ (Conjugate Lines)

अथवा

(ब) बल निकाय (X, Y, Z, L, M, N) के लिए समतल $X+Y+Z=0$ के शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए।

इकाई - 3

प्रश्न (3) (अ) आयाम 'a' तथा आवर्तकाल T की सरल अवर्त गति में, दशाइये कि केन्द्र से α दूरी पर वेग v निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा दिया जाता है :

$$v^2 T^2 = 4\pi(a^2 - \alpha^2).$$

अथवा

(ब) m द्रव्यमान का एक कण एक हल्के तार, जो दो स्थिर विन्दुओं के बीच तना है और इसका तनाव T है, से बोंध दिया गया है। यदि दोनों सिरों से कण की दूरियाँ a, b हैं तो सिद्ध कीजिए कि m द्रव्यमान के एक अल्प अनुप्रस्थ दोलन का आवर्तकाल है :

$$2\pi \sqrt{\frac{mab}{T(a+b)}}$$

इकाई - ५

प्रश्न(५) (अ) एक कण पृथ्वी के पुष्ट से वेग v से प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि गुरुत्व में घटी (Diminution) विचारणीय है, परन्तु हवा का प्रतिरोध उपेक्षणीय है तो दर्शाओं कि पथ एक दीर्घवृत्त है जिसका दीर्घास्त $\frac{2ga^2}{2ga - v^2}$, जहाँ a पृथ्वी की त्रिज्या है।

अथवा

(ब) एक कण अचर वेग v से एक वक्र पर भ्रमण करता है जिसके लिये s तथा v दोनों साथ-साथ शून्य होते हैं यदि किसी बिन्दु s पर त्वरण $\frac{v^2 c}{s^2 + c^2}$ हो, तब सिद्ध कीजिये कि वक्र एक कैटनरी है।

इकाई - ५

प्रश्न(५) (अ) एक कण V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रति इकाई संहति पर प्रतिरोध k (वेग) है। दर्शाइये कि त्र समय के पश्चात् कण का वेग v और इस समय में घली गई दूरी s निम्नांकित से ही जाती है -

$$v = V e^{-kt} \quad \text{या} \quad s = \frac{V}{k} (1 - e^{-kt})$$

अथवा

(ब) तरल (Liquid) की एक गोलाकार बूँद वाष्प में गिरते हुए संघनन द्वारा c की अचर दर से द्रव्यमान प्राप्त करती है दर्शाओं कि विशम में गिरते हुए त्र समय बाद इसका वेग है $\frac{1}{2} g t \left[1 + \frac{M}{M+ct} \right]$.